PART2　法線ベクトルと直線のベクトル方程式

例題

(1)　点 A$(3,\ -4)$ を通り，$\vec{n}=(2,\ -3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2)　点 A$(0,\ -1)$ から直線 l：$x-3y+2=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

Point Pickup

練習

(1) 点 A$(5,\ -1)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ 3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2) 点 A$(4,\ 1)$ から直線 l：$2x-y+3=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

第 13 講　PART2 確認問題

1　点 A(3, 2) を通り，$\vec{n}=(4,\ -5)$ に垂直な直線の方程式は

$$\boxed{\text{ア}}x-\boxed{\text{イ}}y-\boxed{\text{ウ}}=0$$

である。

2　点 A(0, −3) から，直線 l：$x+2y-4=0$ に垂線を引き，
l との交点を H とする。

点 H の座標と線分 AH の長さを求める。
まず，直線 l の法線ベクトルの 1 つは
$\vec{n}=\left(1,\ \boxed{\text{エ}}\right)$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$ (k は実数) とおける。
このとき，$k=\boxed{\text{オ}}$ であるから，

点 H の座標は $\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$

$\mathrm{AH}=\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$

である。

PART2　法線ベクトルと直線のベクトル方程式

例題

(1)　点 A(3, -4) を通り，$\vec{n}=(2,\ -3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2)　点 A(0, -1) から直線 l：$x-3y+2=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

(1)　求める直線上の点を P$(x,\ y)$ とすると，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y+4)$ より　$2(x-3)-3(y+4)=0$

よって，求める方程式は $2x-3y-18=0$

(2)　$\vec{n}=(1,\ -3)$ とおくと，$\vec{n}$ は直線 l の法線ベクトルの１つである。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\,/\!/\,\vec{n}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$ (k は実数) とおける。

H$(s,\ t)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(s,\ t+1)$ より

$$(s,\ t+1)=k(1,\ -3)$$

よって，$s=k,\ t+1=-3k$ より

$$s=k,\ t=-3k-1 \ \cdots\cdots ①$$

また，点 H は直線 l 上の点であるから

$$s-3t+2=0 \ \cdots\cdots ②$$

①を②に代入して

$$k-3(-3k-1)+2=0 \qquad k=-\frac{1}{2}$$

このとき①より　$s=-\dfrac{1}{2},\ t=\dfrac{1}{2}$

よって，H の座標は $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ より

$$\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

練習

(1)　点 $A(5,\ -1)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ 3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2)　点 $A(4,\ 1)$ から直線 $l: 2x-y+3=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

(1)　求める直線上の点を $P(x,\ y)$ とすると，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

$\overrightarrow{AP}=(x-5,\ y+1)$ より　$1\times(x-5)+3\times(y+1)=0$

よって，求める方程式は　$x+3y-2=0$

(2)　$\vec{n}=(2,\ -1)$ とおくと，$\vec{n}$ は直線 l の法線ベクトルの１つである。

よって，$\overrightarrow{AH}\parallel\vec{n}$ より　$\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$（$k$ は実数）とおける。

$H(s,\ t)$ とおくと，$\overrightarrow{AH}=(s-4,\ t-1)$ より

$$(s-4,\ t-1)=k(2,\ -1)$$

よって，$s-4=2k$，$t-1=-k$ より

$$s=2k+4,\ t=-k+1 \cdots\cdots ①$$

また，点 H は直線 l 上の点であるから

$$2s-t+3=0 \cdots\cdots ②$$

①を②に代入して

$$2(2k+4)-(-k+1)+3=0 \qquad k=-2$$

このとき①より　$s=0$，$t=3$

よって，H の座標は $(0,\ 3)$

また $\overrightarrow{AH}=(-4,\ 2)$ より

$$AH=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

第13講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：5，ウ：2

[解説]

求める直線上の任意の点を $P(x,\ y)$ とすると，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ である。 [A]

$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y-2)$ より

$$4\times(x-3)-5\times(y-2)=0$$

よって，求める方程式は　$\boldsymbol{4x-5y-2=0}$

[A]　点 $A(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線のベクトル方程式は，
$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$
（$\vec{n}$ は，この直線の法線ベクトル）

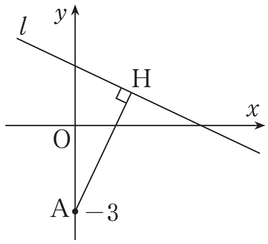
2

[正解] エ：2，オ：2，カ：2，キ：1，ク：2，ケ：5

[解説]

直線 l：$x+2y-4=0$ の法線ベクトルの１つは，

$\boldsymbol{\vec{n}=(1,\ 2)}$ [B]



[B]　直線 $ax+by+c=0$ は，$\vec{n}=(a,\ b)$ を法線ベクトルにもつ。

$\overrightarrow{AH}\parallel\vec{n}$ より

$$\overrightarrow{AH}=k\vec{n}\ \ (k \text{ は実数})$$

とおける。

$H(s,\ t)$ とおくと，$\overrightarrow{AH}=(s,\ t+3)$ より

$$(s,\ t+3)=k(1,\ 2)$$

よって　$s=k,\ t+3=2k$

すなわち　$s=k\ ,\ t=2k-3$　……①

また，点 H は直線 l 上の点であるから，

$$s+2t-4=0 \quad \cdots\cdots②$$

①を②に代入すると，

$$k+2(2k-3)-4=0$$

$$\boldsymbol{k=2}$$

①より　$s=2,\ t=1$

よって　点 H の座標は $\boldsymbol{(2,\ 1)}$

また，$\overrightarrow{AH}=(2,\ 4)$ より

$$AH=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{2^2+4^2}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$$